EQUAZIONI LINEARI DIOFANTEE

Le equazioni del tipo

$$ax + by = c$$

si chiamano equazioni lineari diofantee

Le incognite sono $x, y \ e \ sono \ in \ Z$

Esempio: $6x + 7y = 9$

Le equazioni lineari diofantee

$$ax + by = c$$

possono essere di due tipi

1) $\mathrm{c} = 0 \; (a, b \; \neq 0)$
2) $\mathrm{c} \neq 0 \; (a, b \; \neq 0)$

1) Nel primo caso si ha $\boldsymbol{ax + by = 0}$

E poniamo $\boldsymbol{x = bt}$ **con *t* in Z**

Allora $deve\ essere\ per\ forza\ \boldsymbol{y = -\frac{ab}{b} t}\ (\,possibile\ perch\grave{e}\ b \neq 0\ )$

$$ovvero\ \boldsymbol{y = -at}$$

PROVA

Dimostrare che

$$x = s \text{ e } y = r$$

è una coppia di soluzioni di $ax + by = 0$

vuol dire dimostrare che

«sostituendo questi valori nell'equazione si ha **un'identità** ovvero un'**uguaglianza sempre vera»**

OSS: «Sempre è un avverbio di tempo: in italiano vuol dire **per ogni istante** ma

in matematica vuol dire **per ogni valore delle incognite»**

Quindi vuol dire dimostrare che

a*(valore ipotizzato) + b*(valore ipotizzato) = 0 è una affermazione sempre vera (verità)

Nel nostro caso abbiamo

$$x = bt \text{ e } y = -at$$

Quindi dobbiamo dimostrare che

$$a * bt + b * (-at) = 0 \text{ è una cosa vera}$$

Quindi dobbiamo dimostrare che

$$a * bt + b * (-at) = 0 \text{ è una cosa vera}$$

Eseguiamo i calcoli indicati a sinistra quindi

$$a * bt + b * (-at) = 0 \text{ equivale a}$$

$$a * bt - a * bt = 0 \text{ che equivale a}$$

$$0 = 0 \text{ che è una verità}$$

$$\text{Quindi } a * bt + b * (-at) = 0 \text{ è una cosa vera}$$

Quindi $x = bt$ e $y = -at$ è una coppia di soluzioni di $ax + by = 0$ con $t \in Z$

Dette

A = « $x = s$ »   B = « $y = r$ »   e   C = « $ax + by = 0$»   e

« A ∧ B ∧ C » la loro congiunzione

Dire che

$x = s$ e $y = r$ è una coppia di soluzioni di $ax + by = 0$

equivale a dire che

« A ∧ B ∧ C» è vera

Ovvero equivale ad enunciare una **CONTEMPORANEITÀ VERA di eventi**

e si può scrivere anche così

$$\begin{cases} x = s \\ y = r \\ ax + by = 0 \end{cases}$$

Quindi data $ax + by = 0$ *questa ha per soluzione la coppia* $[bt\ ; -at]$ con $t \in Z$

Esempio:

data $5x+8y=0$ *essa ha per soluzione la coppia (8t; -5t) con t*$\in$ *Z*

Ovvero l'insieme delle infinite coppie (8t; -5t) al variare di t in Z

Quindi

per t=1 (8,-5)

per t=-2 (-16,10)

E via di seguito

ESERCIZI

Date le equazioni $4x - 6y = 0$ e $3x + 8y = 0$

Per ognuna di esse indica la coppia $(bt, -at)$ soluzione

e successivamente trova alcune coppie appartenenti

all'insieme delle coppie $(bt, -at)$ al variare di t in Z

Quindi data l'equazione $ax + by = 0$ essa ha per soluzione tutte le coppie $(bt, -at)$

2) c$\neq 0$

Nel secondo caso vale il seguente teorema che non dimostriamo:

TEOREMA

«L'equazione $ax + by = c$ ha soluzioni in Z se e solo se MCD (a,b) divide c»

Esempio:

$$21x + 15y = 14 \; ha \; soluzioni \; in \; Z?$$

Il teorema prima enunciato dice che la suddetta equazione ha soluzioni se

14 divide il M.C.D. tra 21 e 15,

ma il M.C.D. (21,15) è 3

e 3 non divide 14

Invece l'equazione $21x + 15y = 6$ ha soluzioni in Z perché il $M.C.D.(21,15) = 3$ e 3 divide 6

Come possiamo trovare le soluzioni di $21x \ + 15y \ = \ 6$?

Per l'idendità di Bezout noi sappiamo che esistono h e k tali che

$$3 = 21h + 15k$$

Che è la stessa cosa che dire che esistono x e y tali che $3 = 21x + 15y$

Andiamo intanto a trovare questi due valori con l'algoritmo euclideo

$$21: 15 = 1 \; col \; resto \; di \; 6 \quad quindi \;\; 21 = 1 * 15 + 6 \; quindi \; 6 = 21 - 15 * 1$$

$$15: 6 = 2 \; col \; resto \; di \; 3 \; quindi \; 15 = 6 * 2 + 3 quindi \; 3 = 15 - 6 * 2$$

$$6: 3 = 2 \; col \; resto \; di \; zero \; quindi$$

$$M.C.D.(21{,}15) = 3$$

$$Riprendiamo\ da$$

$$M.C.D.(21{,}15) = 3$$

$$e\ dall'uguaglianza\ che\ esprime\ 3\ (\ rossa\ )$$

Quindi $3 = 15 - 6 * 2 \quad e\ sostituendo\ la\ verde$

$$diventa\ 3 = 15 - (21 - 15 * 1) * 2$$

$$e\ diventa\ 3 = 15 - 21 * 2 + 15 * 2 \ \ e\ diventa$$

$$3 = -21 * 2 + 15 * 3 \quad ovvero$$

$$3 = (-2) * 21 + 15 * 3$$

E quindi i due numeri cercati sono $x = -2 \quad e\ y = 3$

[OSS.: se A=B allora 2A=2B, 3A=3B,….]

[ovvero moltiplicando a sinistra e a destra un’uguaglianza per lo spesso fattore l’uguaglianza non cambia]

Quindi se vale $3 = -21 * 2 + 15 * 3$

Allora vale anche l’uguaglianza che si ottiene

moltiplicando a sinistra e a destra per 2 ovvero la precedente uguaglianza

$3 * 2 = [-21 * 2 + 15 * 3] * 2$ ovvero

$$6 = -21 * 2 * 2 + 15 * 3 * 2$$

che possiamo scrivere anche nel seguente modo avendo cura di lasciare i fattori 21 e 15 che ci servono

$$6 = -21 * 4 + 15 * 6$$

Quindi abbiamo trovato x e y tali che $21x + 5y = 6$ ovvero

$$x = -4 \; e \; y = 6$$

Quindi l’equazione

$$ax + by = c$$

ha soluzioni se e solo se $d = M.C.D.(a, b)$ divide c (TEOREMA)

e ha per soluzioni:

$$x = h * (c: d) \quad e\ y = k * (c: d)$$

Dove h e k sono i numeri in Z dell’identità di Bezout

Ovvero

$$d = a * h + b * k$$

Quindi l'equazione

$$ax + by = c$$

ha soluzioni se e solo se $d = M.C.D.(a, b)$ divide c (TEOREMA)

E, per trovare la coppia di soluzioni, bisogna procedere nel seguente modo:

$$Trovo\ d = M.C.D.(a, b)\ e\ vedo\ se\ d\ divide\ c$$

Costruisco $l'identità\ di\ Bezout\ con\ l'algoritmo\ euclideo$

Ovvero $trovo\ \ h\ e\ k\ tali\ che\ \ d = a * h + b * k$

A questo punto calcolo x e y con le seguenti formule

$$x = h * (c: d) \quad e\ y = k * (c: d)$$

Se vuoi prima calcoli $c: d = m$ e poi applichi le formule

$$x = h * m \quad e\ y = k * m$$

$ESEMPIO$

Risolvi in Z : $56x + 21y = 35$ [a=56; b=21; c=35]

RICORDA: ha soluzioni se e solo se $\mathrm{d} = M.C.D.(a, b)$ divide c (TEOREMA)

$Trovo\ M.C.D.(56; 21)\colon 7\ divide\ 35(c)?\ SI$

Costruisco $l'identit$à $di\ Bezout\ con\ l'algoritmo\ euclideo$

$Ovvero\ trovo\ h\ e\ k\ tali\ che\ 7 = 56h + 21k$

Per poi usare le formule

$x = h * (c\colon d) \quad e\ y = k * (c\colon d)$

$$Trovo\ h\ e\ k\ tali\ che\ 7 = 56h + 21k$$

$$56:21 = 2\ col\ resto\ di\ 14\ quindi\ 56 = 21 * 2 + 14\ quindi\ 14 = 56 - 21 * 2$$

$$21:14 = 1\ col\ resto\ di\ 7\ quindi\ 21 = 14 * 1 + 7\ quindi\ 7 = 21 - 14 * 1$$

$$14:7 = 2\ col\ resto\ \ 0$$

Quindi il M.C.D. è 7 e quindi riparto dall'uguaglianza (rossa) che ha a sinistra 7

Ovvero $7 = \ 21 - 14 * 1$

sostiuisco 14 (verde) e ottengo $7 = 21 - (56 - 21 * 2) * 1$ *che equivale a*

$7 = 21 - 56 * 1 + 21 * 2 * 1$ *che equivale a*

$7 = 21 - 56 * 1 - 21 * 2$ *che equivale a* $7 = 21 * 3 - 56 * 1$

Quindi ho costruito l'indentità di Bezout per 56 e 21 ovvero

$$7 = 21 * 3 - 56 * 1$$

Quindi ho trovato h e k tali che $7 = 56h + 21k$ ovvero

$$h = -1 \; e \; k = \; 3$$

Quindi trovo x e y soluzioni di

$$56x + 21y = 35$$

con le formule $x = h * (c{:}\, d) \quad e \; y = k * (c{:}\, d)$

Ovvero

$$x = -1 * (35{:}\, 7) = -5 \qquad e \qquad y = 3 * (35{:}\, 7) = 15$$

PROVA

$$56 * (-5) + 21 * 15 = 35 \; equivale \; a$$
$$-280 + 315 = 35 \; che \; equivale \; a$$
$$0 = 0$$

$ESERCIZI$

Trova le soluzioni in Z di:

$$4x + 22y = 10$$

$$18x - 27y = 5$$

$$18x - 27y = 36$$

$$31x + 47y = 1$$